Discrete Mathematics 73 (1989) 297–300
North-Holland

COMMUNICATION

SUR LES ATOMES D'UN GRAPHE DE CAYLEY INFINI

Yahya Ould HAMIDOUNE
Université P. et M. Curie, UER 48-ER Combinatoire, 4 Place Jussieu, 75230 Paris, France

Communicated by C. Berge
Received 17 May 1988

Let G be an infinite group and let S be a finite subset of G. The outconnectivity of the Cayley graph $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ is $\kappa^+(X) = \mathrm{Min}\{|(FS)\setminus F| : F$ is a finite nonvoid subset of $G\}$. A positive end is a finite subset R such that $\kappa^+(X) = |(RS)\setminus R|$, which is minimal with respect to this property. We prove that there is a unique positive end containing 1. Moreover this end is a subgroup. As an application we deduce some properties of the connectivity which were known only in the finite case.

1. Introduction

Soient X un graphe, $x \in V(X)$ et $A \subset V(X)$, on pose

$$N^+(A) = \{x \in V(X) - A : \exists y \in V(X), y \in A \quad \text{et} \quad (y, x) \in E(X)\}.$$

Nous définissons le *demi-degré extérieur* de x comme étant $d^+(x) = |N^+(\{x\})|$. Un graphe sera dit *localement fini* si tous les demi-degrés extérieurs de ses sommets sont finis.

Soit $X = (V, E)$ un graphe. Le graphe *inverse* de X est par définition le graphe $X^{-1} = (V, E^{-1})$. C'est le graphe obtenu en renversant les orientations de tous les arcs de X.

Soient $X = (V, E)$ un graphe et $A \subset V$. Le sous graphe de X *induit* par A sera noté $X[A]$.

Une partie propre B de $V(X)$ est appelée un *puits* si $N^+(B) = \emptyset$.

2. Terminaisons d'un graphe

Les atomes d'un graphe symétrique ont été indépendemment introduits par Mader [8] et Watkins [9]. Les résultats de Mader et Watkins ont été étendus au cas général dans [1].

L'objet de cette note est de démontrer dans les cas infini localement fini des énoncés analogues à ceux démontrés dans [1–6] pour les graphes finis. Les démonstrations seront parfois plus simples que dans le cas fini.

0012-365X/89/$3.50

Soit X un graph. La *connectivité extérieure* de X est par définition

$$\kappa^+(X) = \mathrm{Min}\{|N^+(F)| : F \text{ est une partie finie non vide de } V(X)\}.$$

Une partie finie F de $V(X)$ sera appelée un *morceau positif* si $\kappa^+(X) = |N^+(F)|$. Un morceau positif minimal pour l'inclusion sera appelé une *terminaison positive.*

Remarque. La partie $\emptyset$ est une terminaison positive de X si X possède un puits fini. Si X est infini, $\kappa^+(X)$ peut être arbitrairement grand sans que le graphe soit connexe. Si X est fini $\kappa^+(X)$ est la connectivité (forte) de X, cf. [1], §2.

Lemme 2.1. *Soit X un graphe tel que $\kappa^+(X) \neq 0$. Alors X possède une terminaison positive de cardinal* 1 *si et seulement si* $\kappa^+(X) = \mathrm{Min}(d^+(x); x \in V(X))$.

Lemme 2.2. *Soit X un graphe et R une terminaison positive non vide de X. Alors $X[R]$ est fortement connexe.*

Démonstration. Supposons que $X[R]$ ne soit pas fortement connexe et soit P un puits de $X[R]$. On a $N_X^+(P) \cap R = \emptyset$. D'où $N_X^+(P) \subset N_X^+(R)$. Ceci suffit pour montrer que p est un morceau positif de X, ce qui contredit la définition d'une terminaison. □

Proposition 2.3. *Soient X un graphe infini localement fini, R une terminaison positive de x et F un morceau positif de X. Alors $R \subset F$ ou $R \cap F = \emptyset$.*

En particulier deux terminaisons positives distinctes sont disjointes.

Démonstration. Supposons $R \cap F \neq \emptyset$. On pose $T = N^+(R)$ et $S = N^+(F)$.

$\bar{A}$		R_5	
T	R_1	R_2	R_3
R		R_4	
	F	S	

On voit facilement que $N^+(R \cap F) \subset R_1 \cup R_2 \cup R_4$. Il résulte que

$$|R_1| + |R_2| + |R_4| \geqslant |N^+(R \cap F)| \geqslant \kappa^+(X) = |R_1| + |R_2| + |R_3|. \tag{1}$$

D'où

$$|R_4| \geqslant |R_3|. \tag{2}$$

Le raisonnement ci-dessus appliqué à $R \cup F$, montre que $|R_4| \leqslant |R_3|$. D'après (2), on a $|R_4| = |R_3|$. Compte tenu de (1), on a $\kappa^+(X) \leqslant |N^+(R \cap F)| \leqslant |R_1| + |R_2| + |R_4| = |T| = \kappa^+(X)$. Il résulte que $R \cap F$ est un morceau positif. Donc $R \cap F = F$. □

Le démonstration ci-dessus est une présentation intuitive de celle que nous avons donnée dans le cas fini pour les atomes, cf. [1], Proposition 1. Le fait que X est supposé infini simplifie beaucoup la situation.

Remarque 1. La proposition 2.3 est en général fausse si X est fini. L'énoncé analogue dans le cas fini est la proposition 1 de [1].

Remarque 2. Appelons un *semi-morceau positif* de X un ensemble F tel que $|N^+(F)| = \kappa^+(X)$ et tel que $V(X) - F$ soit fini. La démonstration ci-dessus s'adapte pour montrer qu'une terminaison d'un graphe infini localement fini est contenue dans tout semi-morceau qui la rencontre.

Remarque 3. Dans le cas ou X est un graphe symétrique connexe, $\kappa^+(X)$ se réduit à $\kappa_f(X)$ défini par Jung et Watkins dans [7]. Dans ce cas particulier, la conclusion de la proposition 2.3 peut se déduire du théorème 1 de [7]. Mais la remarque 2 n'en découle pas.

3. Graphes de Cayley

Un graphe dont le groupe d'automorphismes agit transitivement sur l'ensemble des sommets est dit *sommet-transitif*.

Soient G un groupe et $S \subset G$. Le graphe de Cayley défini par S est par définition $\mathrm{Cay}(G, S) = (G, E)$, où $E = \{(x, y) \mid x^{-1}y \in S\}$. On a

$$N^+(x) = x \cdot S = \{xs \mid s \in S\}.$$

Soit $\gamma_a : x \to ax$, $a \in G$, une translation à gauche. On a

$$(x, y) \in E \leftrightarrow x^{-1}y \in S \leftrightarrow (ax)^{-1}(ay) \in S \leftrightarrow (\gamma_a(x), \gamma_a(y)) \in E.$$

Lemme 3.1. *Les translations à gauche sont des automorphismes de* $\mathrm{Cay}(G, S)$. *En particulier* $\mathrm{Cay}(G, S)$ *est sommet-transitif.*

Remarque. Supposons que S soit finit et que $\kappa^+(X) \neq 0$. Il résulte de la Proposition 2.3, qu'il existe une terminaison positive unique contenant 1. Cette terminaison sera appelée la *terminaison positive* de $\mathrm{Cay}(G, S)$.

Proposition 3.2. *Soient G un groupe infinie et S une partie finie de G tels que* $\kappa^+(\mathrm{Cay}(G, S)) \neq 0$. *Soit R la terminaison de* $\mathrm{Cay}(G, S)$. *Alors R est le sous groupe de G engendré par $S \cap R$. En outre $N^+(R)$ est partitionné par des classes à droite* modulo R.

Démonstration. Soit $x \in R$. D'après le Lemme 3.1, $\gamma_X(R)$ est une terminaison positive de $\mathrm{Cay}(G, S)$. Mais $x \in R \cap \gamma_X(R)$. Compte tenu de la Proposition 2.3, on a $R = \gamma_X(R)$. Ceci et le fait que R est fini montrent que R est un sous groupe.

Le fait que R est engendré par $R \cap S$ résulte du fait que $X[R]$ est fortement connexe de la même manière que dans la preuve du théorème 3.1. de [4].

Ce que nous venons de montrer permet d'établir la relation

$$N^+(R) = \bigcup_{x \in S \setminus R} Rx. \qquad \square$$

Corollaire 3.3. *Soient G un groupe infini et S une partie finie de G tels que* $\kappa^+(\mathrm{Cay}(G, S) \neq 0$. *Alors* $\kappa^+(\mathrm{Cay}(G, S)) \geqslant \lfloor \frac{2}{3} |S \setminus \{0\}| \rfloor + 1$.

La démonstration utilise la Proposition 3.2 et les idées des preuves des Propositions 3.4 et 3.5 de [2].

Corollaire 3.4. *Soient G un groupe infini abélien et S une partie finie de G. Alors toute terminaison positive de* $\mathrm{Cay}(G, S)$ *est une terminaison positive de* $\mathrm{Cay}(G, -S)$.

L'idée de la démonstration est la même que celle du Corollaire 2.2 de [5].

Les méthodes utilisées dans [6] permettent d'étendre la proposition 3.1 et le Corollaire 3.2 au cas des graphes sommet-transitifs. Nous énonçons ci-dessous la généralisation de ce dernier.

Proposition 3.5. *Soient X un graphe sommet-transitif infini localement fini tels que* $\kappa^+(X) \neq 0$. *Alors* $\kappa^+(X) \geqslant \lfloor \frac{1}{2} d^+(X) \rfloor + 1$.

En outre si X est symétrique ou si X est anti-symétrique, alors $\kappa^+(X) \geqslant \lfloor \frac{2}{3} d^+(X) \rfloor + 1$.

Bibliographie

[1] Y.O. Hamidoune, Sur les atomes d'un graphe orienté, C.R. Acad. Sc. Paris A 284 (1977) 1253–1256.
[2] Y.O. Hamidoune, Quelques problèmes de connexité dans les graphes orientés, J. Comb. Theory, Ser. B 30 (1981) 1–10.
[3] Y.O. Hamidoune, An application of connectivity theory in graphs to factorization of elements in groups, Europ. J of Combinatorics 2 (1981) 108–112.
[4] Y.O. Hamidoune, On the connectivity of Cayley digraphs, Europ. J. Combinatorics 5 (1984) 309–312.
[5] Y.O. Hamidoune, Sur la séparation dans les graphes de Cayley abéliens, Discrete Math. 55 (1985) 323–326.
[6] Y.O. Hamidoune, On vertex-transitive graphs of order p^n, Preprint.
[7] H.A. Jung and M.E. Watkins, On the connectivities of finite and infinite graphs, Math. Ann. 83 (1977) 121–131.
[8] W. Mader, Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen, Arch. Math. 22 (1971) 333–336.
[9] M.E. Watkins, Connectivity of transitive graphs, J. Comb. Theory 8 (1970) 23–29.